Leçon 224 : Exemple de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Développements :

Etude asymptotique de l'équation de Bessel, Suite récurrente : convergence lente.

Bibliographie :

Rombaldi analyse réelle, Gourdon, Pommellet, Bernis, Faraut, Rouvière.

Rapport du jury :

Cette leçon doit permettre aux candidats d'exprimer leur savoir-faire sur les techniques d'analyse élémentaire que ce soit sur les suites, les séries ou les intégrales. On peut par exemple établir un développement asymptotique à quelques termes des sommes partielles de la série harmonique, ou bien la formule de Stirling que ce soit dans sa version factorielle ou pour la fonction γ . On peut également s'intéresser aux comportements autour des singularités de fonctions spéciales célèbres. Du côté de l'intégration, on peut évaluer la vitesse de divergence de l'intégrale de la valeur absolue du sinus cardinal, avec des applications pour les séries de Fourier ; voire présenter la méthode de Laplace. Par ailleurs, le thème de la leçon permet l'étude de suites récurrentes (autres que un'1 " sinpunq), plus généralement de suites ou de fonctions définies implicitement, ou encore des études asymptotiques de solutions d'équations différentielles (sans résolution explicite).

Intro :

Un DL, c'est un développement asymptotique mais avec que des termes polynomiaux. Donc on commence déjà par s'intéresse aux DLs qui nous donnent beaucoup d'informations. Idée : pour le discret (suite et série), on se ramène au continu, c'est plus facile (c'est la philosophie de la partie sur les séries surtout et un peu aussi pour celle sur les suites !

1 Développement asymptotique de fonctions

Remarque 1. *Cadre : $I =]a, b[$ un intervalle, $c \in I$, $f : I \to R$, $n \in \mathbb{N}$.*

1.1 Développements limités

Remarque 2. *On commence par étudier les DL puisque ce sont les développements asymptotiques les plus simples et nous donne donc accès à déjà pas mal d'informations. Mais ce n'est pas tout, puiqu'en fait les DL nous permette d'avoir accès à de "vraies" développements asymptotiques par composition ou en se ramenant à $+\infty$ en posant $t = 1/x$.*

Définition 3 (Romb p207)**.** *Admettre un DL.*

Proposition 4 (Romb p207)**.** *Unicité du DL.*

Exemple 5 (Romb p207)**.** *Fonctions polynomiales, $1/(1-x)$.*

Proposition 6 (Romb p208)**.** *f est continue (ou se prolonge par continuité) en c si et seulement si elle admet un $DL0(c)$.*

f est dérivable (ou se prolonge en une fonction dérivable) en c si et seulement si elle admet un $DL1(c)$.

Contre exemple 7 (Romb p208)**.** *$x^3 \sin(1/x)$ admet un DL à l'ordre 2 sans admettre de dérivée seconde.*

Théorème 8 (Romb p208)**.** *Formule de Taylor Young.*

Une application n fois dérivable en a admet un développement limité en a, c'est-à-dire un développement asymptotique polynomial.

Théorème 9. *Théorème de Taylor-Intégral : Si $f \in D^{n+1}$, le $o((x-c)^n)$ du théorème précédent vaut $\int_c^x (x-t)^n/n! f^{(n+1)}(t)dt$. (A mettre ?)*

Exemple 10 (Romb p209)**.** $\exp(x)$, $\cos(x)$, $(1+x)^\alpha$.

Remarque 11. *Si f est D^k , pour $n \geq k$, un $DL_n(c)$ de f donne les dérivées de f en c.*

Exemple 12 (Romb p210)**.** *DL de $\cos(\sqrt{t})$ pour en déduire $f^{(k)}(0)$.*

Application 13 (ZQ)**.** *Théorème central limite. (Attention, dépend de la preuve)*

Remarque 14 (Romb p207)**.** *On peut effectuer un changement de variables dans le DL. Ainsi, en translatant on peut passer d'un $DL_n(c)$ à un $DL_n(0)$.*

Remarque 15. *On ne va regarder que les DL en 0 par la suite.*

1.2 Opérations sur les développements limités

Remarque 16. *Utile comme partie ?*

Théorème 17 (Romb p210)**.** *Pour f, g ayant des $DL_n(0)$, $f(x) = P(x) + o(x^n)$, $g(x) = Q(x) + o(x^n)$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f, f+g, f.g$ ont des $DL_n(0)$ dont on trouve l'expression. ($fg(x) = R(x) + o(x^n)$ où $R(X) = P(X)Q(X) mod(X^n)$)*

Exemple 18. *$DL_n(0)$ de ch,sh, $exp(x)/(1+x)$.*

Théorème 19 (Romb p211)**.** *Pour f, g ayant des $DL_n(0)$, $f(x) = P(x) + o(x^n), g(x) = Q(x) + o(x^n)$, et $g(0) = 0$, $f \circ g(x) = R(x) + o(x^n)$ où $R(X) = P(Q(X)) mod(x^n)$.*

Exemple 20 (Romb p212)**.** $\sin(\sinh(x)) - \sinh(\sin(x)) = ...$

Corollaire 21 (Romb p212)**.** *Si f a un $DL_n(0)$ et $f(0) \neq 0$, en écrivant $f(x) = f(0)(1-g(x))$, on peut calculer un $DL_n(0)$ de $1/f = 1/f(0)1/(1-g)$ par composition des DL de g et de $x \mapsto 1/(1-x)$.*

Exemple 22 (Rombp 213)**.** tan.

Remarque 23 (Romb p212)**.** *Si f réalise un C^n-difféomorphisme, on peut aussi calculer un $DL_n(0)$ de f^{-1} car $f^{-1} \circ f(x) = x = x + o(x^n)$. On cherche donc à calculer les coeffs de P tel que $P(Q(X)) = X mod(X^n)$, pour $f(x) = Q(x) + o(x^n)$.*

Exemple 24 (Romb p213)**.** *$f(x) = x + \ln(1+x)$.*

Exemple 25 (Gourdon p90)**.** *DL en 0 de $\log(\sin(x)/x)$. (Où ?)*

1.3 Développements asymptotiques

Définition 26 (Gourdon p86)**.** *[Romb p220 bof] Echelle de comparaison.*

Exemple 27 (Gourdon p86)**.** *Echelles de comparaison courantes. +Rombaldi $(x-a)^k$ en a.*

Définition 28 (Gourdon p87)**.** *Développement asymptotique.*

Proposition 29 (Gourdon p87)**.** *Unicité du DA.*

Remarque 30. *Faire un DL, c'est faire un DA par rapport à l'échelle $((x-a)^k)_{k\in\mathbb{N}}$.*

Exemple 31 (Romb p221)**.** *$x^{1/x}$.*

Exemple 32 (Gourdon p91)**.** *DA de $(x^3+x)^{1/3} - (x^3-x)^{1/3}$.*

Proposition 33 (Romb)**.** *Etude locale de la position d'une courbe par rapport aux asymptotes. (?)*

2 Développements asymptotiques et intégration

Remarque 34. *Pour déterminer des développements asymptotiques des intégrales à paramètres, c'est de savoir où se situe toute la "masse" de la fonction intégrande et de se dire que c'est l'intégration autour de ce point qui va être la plus importante. Et pour savoir où se situe la masse de la fonction intégrante, il nous faut une idée de son développement asymptotique. Par exemple, c'est ce qu'on fait dans la méthode de Laplace. Et c'est un peu ce qu'on spécifie dans les intégrations des relations de comparaison ?*

2.1 Intégration de développements limités

Proposition 35 (Romb p214)**.** *Intégration des DL.*

Exemple 36 (Romb p214)**.** $\ln(1+x)$, arctan.

Corollaire 37 (Romb p215)**.** *Dérivation des DL (attention aux conditions).*

Exemple 38 (Romb p215)**.** *DL de $1/(1-x)^2$.*

Contre exemple 39. *$f(x) = x^3 \sin(1/x)$. $f(x) = 0 + o(x^2)$, mais $f'(x) = x(2x\sin(1/x) - \cos(1/x)) \neq 0 + o(x)$, car f' n'est pas C^1 en 0.*

2.2 Equivalent d'une primitive

Remarque 40. *Ca se marie bien avec une IPP ? Puisqu'on montre que le terme de bord est le plus important en montrant que la nouvelle intégrale est négligeable devant celle initiale en utilisant le thm de sommation.*

Proposition 41 (Gourdon p159)**.** *Intégration des relations de comparaison. Donner les deux propriétés avec les petits o.*

Remarque 42 (Gourdon p159)**.** *Mêmes résultats avec les grands O et équivalents.*

Exemple 43 (Gourdon p160)**.** *On retrouve $\ln(x) = o_{+\infty}(x^s)$, $\forall s > 0$.* $\arccos(x) = \sqrt{2}\sqrt{1-x} + 1/(6\sqrt{2})(1-x)^{3/2} + o((1-x)^3)$.

Contre exemple 44. *Si $s > 1$, $\int_1^{+\infty} 1/t^s ds$ converge, et $\forall b > s, 1/t^b = o_{+\infty}(1/t^s)$, mais $(\int 1^x 1/t^b dt)(\int_1^x 1/t^s)^{-1}$ ne tend pas vers 0.*

Exemple 45 (Gourdon p169)**.** *DA de $\int_2^x 1/\ln(t)dt$.*

Exemple 46 (Pommellet, FGN AN1)**.** *$DAn(0)$ de $\int_0^{+\infty} e^{-t}/tdt$.*

Proposition 47 (Gourdon p168)**.** *Equivalent de $\int_a^{+\infty} g$ où $\frac{g'}{g} \simeq \mu/x$ au voisinage de $+\infty$.*

Exemple 48 (X ENS AN 2)**.** *$\int_x^{+\infty} e^{-t}/tdt$. $\int_1^x e^t/t$. Regarder exo TD prépa.*

Exemple 49 (Bernis)**.** *Développement asymptotique d'une solution de l'équation de Bessel.*

2.3 Dans l'analyse de Fourier

Proposition 50 (Faraut p99)**.** *Lemme de Riemann Lebesgue.*

Proposition 51 (Faraut p100)**.** *Lemme de Riemann Lebesgue si sur un compact, on a un petit o.*

Proposition 52 (Faraut p100)**.** *On peut en déduire un résultat dans un cadre un peu plus général et obtenir un développement asymptotique de la fonction* $F(\lambda) = \int e^{i\lambda\phi(x)} f(x)dx)$ *lorsque* ϕ *est de classe* C^2*. et que* f *est de classe* C^1*.*

Proposition 53. *Coefficients de Fourier : thm de comparaison entre le comportement d'une fonction et celui de ses coefficients de Fourier [Queffélec-Zuily] ?*

Proposition 54. *Vitesse de divergence de l'intégrale du sinus cardinal en valeur absolue ?*

3 Développements asymptotiques de suites et de séries

3.1 Séries numériques

Proposition 55 (Gourdon p202)**.** *Equivalent des sommes partielles et des restes.*

Remarque 56. *On voit l'intérêt d'utiliser des équivalents télescopiques du terme général de la série.*

Exemple 57. *.* $n^n \simeq n^n - (n-1)^{n-1}$ *donc* $\sum_{k=1}^n k^k \simeq n^n$*.*

Application 58 (Gourdon p202)**.** *DA des nombres harmoniques.*

Remarque 59 (Gourdon p201)**.** *Mêmes résultats avec grands O et petits o.*

Application 60 (Gourdon p202)**.** *Séries de Riemann.*

Contre exemple 61 (Gourdon p214)**.**

Proposition 62 (Gourdon p204)**.** *Comparaison série-intégrale.*

Exemple 63 (EL Amrani)**.** $\sum_{k=1}^n 1/k^a \simeq n^{1-\alpha}$ *si* $a < 1$*.*
$\sum k = n + 1^{+\infty} 1/k^a \simeq n^{1-a}$ *si* $a > 1$*.*

Exemple 64 (Gourdon p282)**.** *Equivalent de la fonction Zêta de Riemann.*

Application 65 (Gourdon p204)**.** *Séries de Bertrand.*

Proposition 66 (Gourdon p205)**.** *Règle de Raab Duhamel. Voir TD prépa.*

Application 67. *La série de terme général* $u_n = \frac{2.4...(2n-2)}{3.5...(2n-1)}$ *est divergente.*

Proposition 68 (Gourdon p301)**.** *Formule d'Euler Mac Laurin (qui permet d'aller à n'importe quel ordre !!)*

Application 69 (Gourdon p301)**.** *DA de la suite harmonique.*

3.2 Suites définies par récurrence

Remarque 70. *On s'intéresse aux suites de la forme* $u_{n+1} = f(u_n)$*. Nous cherchons des conditions suffisantes sur* f *pour pouvoir déterminer un équivalent de la suite* u_n*.*

Exemple 71 (FGN AN1 p102)**.** $f(t) = t + \exp(-t)$*.*

Exemple 72 (FGN AN1 p101)**.** $f(t) = t + 1/t$*.*

Proposition 73 (FGN AN1 p99)**.** $f(t) = t - at^\alpha + o(x^\alpha)$ *équivalent de* u_n*.*

Exemple 74 (FGN AN1 p99)**.** *[Bernis]* $\sin$, $\ln(1+x)$*.*

Proposition 75 (Bernis)**.** *La vitesse de convergence du point fixe compact peut être extrêmement lente. Pour la fonction* $f : x \mapsto x - x^r$ *on a* $U_n \simeq C/n^{1/(r-1)}$ *.*

Théorème 76 (Rouvière)**.** *Théorème du point fixe de Picard et vitesse de convergence.*

3.3 Suites définies implicitement

Proposition 77 (Romb p224)**.** *[FGN AN1 p129] DA de* $\tan(x) = x$*.*

Proposition 78 (Romb p225)**.** *Soit* x_n *la solution de* $x^n - nx + 1 = 0$ *dans* $]0,1[$*. Alors* $x_n \simeq 1/n$*.*

Proposition 79 (Romb 225)**.** $x^n - x - n = 0$*.*

Proposition 80 (Romb p225)**.** $\cos(x)/x$*.*

Proposition 81 (Romb p226)**.** $\tan(x) - \tanh(x)$*.*

Proposition 82 (FGN AN1 p128)**.** *Equivalent de la plus grande racine réelle de* $X^{2n} - 2nX + 1$*.*